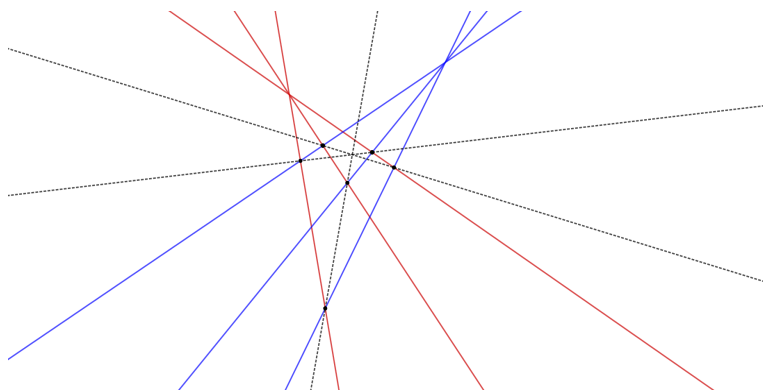




III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

LIGA ZADANIOWA III LO 2019/2020



Okladka: twierdzenie dualne do twierdzenia Pappusa
Rysunki: Filip Konieczny
Tarnów 2020

Opiekun naukowy:
Marcin Radwański

Wybór zadań i ocena:
Dominik Chmura
Filip Konieczny
Rafał Pyzik

Wstęp

Liga zadaniowa III LO w Tarnowie odbywała się w roku szkolnym 2019/2020. Na przestrzeni sześciu miesięcy – od października 2019 do marca 2020 na stronę facebookową konkursu wrzucane były seriami cztery zadania, na rozwiązanie których uczestnicy konkursu mieli miesiąc. Rozwiązania przysyłane były drogą mailową (na adres ligazadaniowaiilo@gmail.com) i oceniane wg tradycyjnej skali, stosowanej m.in. w Olimpiadzie Matematycznej: 0, 2, 5 i 6 punktów. W zawodach wzięło udział trzynastu uczestników z klas pierwszych (zarówno po gimnazjum jak i po szkole podstawowej) oraz dwóch uczestników z klasy drugiej.

Pomysłodawcą konkursu był Marcin Radwański, nauczyciel matematyki w III LO. Układaniem zadań, a także redakcją niniejszej broszury, zajmowali się Rafał Pyzik, Filip Konieczny i Dominik Chmura – uczniowie klasy IIIF.

Uczestnicy

Karol Bielaszka, IF
Kacper Jachym, IFg
Karina Juszczyk, ICg
Weronika Karaś, ICg
Michał Król, IF
Mateusz Kosman, IF
Olga Kozioł, IEg
Karolina Kulas, IF
Karol Kubek, IF
Jacek Markiewicz, IF
Kinga Pałka, IF
Jakub Podosek, IF
Julia Sus, IBg
Stanisław Majchrzak, IIF
Jakub Pawlina, IIF

Wyniki

Klasa 1

Uczestnik	I	II	III	IV	V	VI	Suma
Karol Kubek	24	24	20	12	23	18	121
Karol Bielaszka	24	23	17	6	11	6	87
Olga Koziół	18	11	17	6	6	18	76
Weronika Karaś	24	17	17	-	-	11	69
Kacper Jachym	-	-	20	-	24	-	44
Jacek Markiewicz	6	11	8	6	-	-	31
Jakub Podosek	-	12	-	6	-	12	30
Karina Juszczyk	16	13	-	-	-	-	29
Karolina Kulas	12	11	5	-	-	-	28
Michał Król	14	11	-	-	-	-	25
Julia Sus	24	-	-	-	-	-	24
Mateusz Kosman	-	6	-	6	-	-	12
Kinga Pałka	-	12	-	-	-	-	12

Klasa 2

Uczestnik	I	II	III	IV	V	VI	Suma
Stanisław Majchrzak	18	24	12	-	-	-	54
Jakub Pawlina	24	-	-	-	-	-	24

Treści zadań

1. Znajdź wszystkie takie trójki kolejnych liczb dodatnich nieparzystych, że każda liczba z tej trójki jest liczbą pierwszą.
2. Wiadomo, że $a + b + c = 7$ oraz $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$. Oblicz $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.
3. Dany jest trójkąt ABC , którego środkiem okręgu opisanego jest O . Udowodnić, że jeśli $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ to trójkąt BOC jest równoboczny.
4. Mamy worek z liczbami całkowitymi od 1 do 10, każda występuje w nim raz. Na ile sposobów możemy z tego worka wyciągnąć niektóre z tych liczb, by suma tych pozostałych w worku była parzysta? Podaj wynik wraz z uzasadnieniem.
5. Ile jest liczb całkowitych dodatnich nie większych od 2019, które nie są podzielne przez 3 ani przez 5.
6. Rozwiąż układ równań w liczbach rzeczywistych

$$\begin{cases} x^2 + 3y = z - 1 \\ y^2 + 3z = x - 1 \\ z^2 + 3x = y - 1 \end{cases}$$

7. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB = AD$ oraz $CB = CD$. Oznaczmy punkt przecięcia prostych BC i AD przez X . Na trójkątach XCD i XAB opisano okręgi, oznaczmy ich punkt przecięcia (różny od X) przez M . Udowodnij, że punkty A, C, M są współliniowe.
8. Niech $\tau(n)$ oznacza liczbę dzielników liczby n , a $\lfloor x \rfloor$ liczbę x zaokrągloną w dół. Pokazać, że:

$$\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \cdots + \tau(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$$

9. Dany jest prostokąt $ABCD$ oraz dwa okręgi ω_1 i ω_2 odpowiednio o średnicach AB i AD . Oznaczmy punkt przecięcia tych okręgów (różny od A) przez X . Udowodnić, że punkty B, D, X są współliniowe.
10. Udowodnij, że liczba całkowita, większa od 4, n dzieli liczbę $(n-1)!$, wtedy i tylko wtedy gdy liczba n jest złożona.
Uwaga: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.
11. Dany jest równoległobok o polu 1. Udowodnić, że można przykryć go w całości prostokątem o polu 2.
12. Niech a, b, c to długości boków trójkąta. Udowodnić, że zachodzi następująca nierówność:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq \sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b}$$

13. Udowodnić, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y i z takich, że $0 < x, y, z < 1$ zachodzi nierówność:

$$xyz + (1-x)(1-y)(1-z) < 1$$

14. Na Wigilię przybyło n gości. Przed wieczerzą tradycyjnie wszyscy łamią się opłatkiem. Każde łamanie trwa dokładnie minutę, a każdy gość po skończeniu łamania może natychmiast przejść do następnego. Nie można dzielić się opłatkiem z tą samą osobą kilka razy. Dla jakich wartości n możliwe jest takie łamanie opłatkiem, by podczas niego każdy się z kimś cały czas łamał i na koniec wszyscy podzielili się ze wszystkimi?
Przykład: dla $n = 4$ jest to możliwe. W pierwszej turze łamią się ze sobą pary $(1,2)$ i $(3,4)$, potem $(1,3)$ i $(2,4)$, a następnie $(1,4)$ i $(2,3)$.
15. Dane są liczby całkowite dodatnie x, y, z takie, że $NWD(x, y, z) = 1$ oraz $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Wykazać, że $x + y$ jest kwadratem pewnej liczby całkowitej.
16. Dany jest trójkąt ABC , którego okrąg wpisany jest styczny do boków AC i AB odpowiednio w punktach E i F . Niech P to punkt przecięcia prostej EF z dwusieczną $\sphericalangle ABC$. Niech M i N to odpowiednio środki odcinków AC i BC . Udowodnić, że
- $\sphericalangle BPC = 90^\circ$
 - punkty N, M, P są współliniowe.
17. Niech $2 < p < q$ będą kolejnymi liczbami pierwszymi. Udowodnić, że liczba $p + q$ ma co najmniej trzy dzielniki pierwsze lub jest podzielna przez kwadrat liczby pierwszej.
18. Okręgi dopisane do trójkąta ABC leżące naprzeciwko wierzchołka B oraz C są styczne do boków AC i AB odpowiednio w punktach D i E . Wykazać, że $CD = BE$.
Uwaga: Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg styczny do jednego z jego boków i do przedłużeń dwóch pozostałych.
19. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ które spełniają

$$f(xy) + x = yf(x) + f(x)$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y .

20. Dany jest zbiór S zawierający n liczb całkowitych. Udowodnić, że istnieje niepusty podzbiór S , którego suma elementów jest podzielna przez n .
21. Udowodnij, że dla liczby pierwszej p , większej od 3, liczba $\frac{p^2-1}{24}$ jest całkowita.
22. Znajdź wszystkie rozwiązania poniższego układu równań w liczbach rzeczywistych x, y, z :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}$$

23. Adaś i Basia na zmianę kładą na pojedynczych kwadratach tablicy o rozmiarze 100×100 białe pionki. Wygrywa ten, kto pierwszy ustawi 5 białych pionków w jednej linii (pionowej lub poziomej). Grę zaczyna Adaś. Kto ma strategię wygrywającą (czyli, niezależnie od ruchów przeciwnika, wygra)? Podaj odpowiedź wraz z uzasadnieniem.
24. Udowodnij, że za pomocą ołówka, cyrkla i linijki bez podziałki można podzielić okrąg na dziewięć części o równych polach.

Rozwiązania

1. Znajdź wszystkie takie trójki kolejnych liczb dodatnich nieparzystych, że każda liczba z tej trójki jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że w każdej trójce kolejnych liczb nieparzystych jest liczba podzielna przez 3. Więc jedynymi trójkami mogącymi spełniać warunki zadania są takie, które zawierają liczbę 3 (nie ma innych liczb pierwszych podzielnych przez 3). Możliwymi kandydatami są więc trójki (1,3,5) i (3,5,7). Tylko druga z nich spełnia warunki zadania.

2. Wiadomo, że $a + b + c = 7$ oraz $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$. Oblicz $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $(a + b + c)(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}) = \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} = 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + 3$.

Zatem $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} = (a+b+c)(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}) - 3 = 7 \cdot \frac{7}{10} - 3 = \frac{49}{10} - 3 = \frac{19}{10}$.

3. Dany jest trójkąt ABC , którego środkiem okręgu opisanego jest O . Udowodnić, że jeśli $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ to trójkąt BOC jest równoboczny.

Rozwiązanie:

Sposób 1

Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym otrzymujemy, że $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. Zauważmy, że skoro O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC to odcinki OB i OC są równej długości. Widzimy teraz, że jeden z kątów trójkąta BOC ma miarę 60° oraz dwa jego boki mają równą długość, więc jest to trójkąt równoboczny.

Sposób 2

Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na ABC . Z twierdzenia sinusów $2R = \frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2BC$, więc $R = BC = OB = OC$, co oznacza, że trójkąt BOC jest równoboczny.

4. Mamy worek z liczbami całkowitymi od 1 do 10, każda występuje w nim raz. Na ile sposobów możemy z tego worka wyciągnąć niektóre z tych liczb, by suma tych pozostałych w worku była parzysta? Podaj wynik wraz z uzasadnieniem.

Rozwiązanie:

Sposób 1

Suma liczb od 1 do 10 wynosi 55. Zauważmy, że gdy w worku jest parzysta suma liczb, to wyciągnęliśmy z niego liczby, które mają nieparzystą sumę. Więc sparujmy zbiory w pary (zbiór o sumie parzystej - zbiór o sumie nieparzystej) takie, że ich suma wynosi 55. Oczywiście odpowiadają one zestawieniu w worku parzystej sumy liczb. Wszystkich zbiorów jest 2^{10} (każdy element możemy wziąć lub nie, każdy wybór jest niezależny, wyborów jest 10, stąd 2^{10}). Więc takich par jest $2^9 = 512$.

Sposób 2

Na początku wyciągnijmy z worka pewne liczby z zakresu od 2 do 10. Możemy to zrobić na 2^9 sposobów (mamy do wyboru 9 elementów, każdy element można wybrać lub nie, każdy wybór jest niezależny). Musimy teraz podjąć decyzję, czy wyjąć jedynkę z worka. Chcemy, by suma liczb w worku była parzysta. Jeśli suma w worku jest nieparzysta, musimy wyjąć z niego jeszcze jedynkę, jeśli zaś suma jest parzysta, to nie możemy jej wziąć. Stąd sposobów wyjęcia jest $2^9 = 512$.

5. Ile jest liczb całkowitych dodatnich nie większych od 2019, które nie są podzielne przez 3 ani przez 5.

Rozwiązanie:

Liczb podzielnych przez 3 i nie większych od 2019 jest $\left[\frac{2019}{3}\right] = 673$ a liczb podzielnych przez 5 i nie większych od 2019 jest $\left[\frac{2019}{5}\right] = 403$. Aby obliczyć liczbę liczb niepodzielnych przez 2019, od 2019 musimy odjąć 673 oraz 403. Ale wtedy podwójnie odejmujemy liczby podzielne jednocześnie przez 3 i 5, tzn. liczby podzielne przez 15, których jest $\left[\frac{2019}{15}\right] = 134$. Ostateczny wynik to $2019 - 673 - 403 + 134 = 1077$.

6. Rozwiąż układ równań w liczbach rzeczywistych

$$\begin{cases} x^2 + 3y = z - 1 \\ y^2 + 3z = x - 1 \\ z^2 + 3x = y - 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Dodając równania stronami i przenosząc wszystko na jedną stronę otrzymujemy $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 = 0$. Czyli, po zwinięciu w kwadraty $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 0$. Zauważmy, że kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny, więc aby zachodziła powyższa równość konieczne jest, by każdy z kwadratów miał wartość 0. Otrzymujemy, że jedynym kandydatem na rozwiązanie układu równań jest trójka $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$. Wstawiając te wartości do oryginalnych równań widzimy, że trójka ta spełnia układ równań. Uwaga: Wstawienie otrzymanego rozwiązania do równania było konieczne. Dodanie stronami równań nie jest przekształceniem równoważnym, dlatego nie ma

gwarancji, że otrzymane rozwiązanie spełnia pierwotny układ równań. Dobrze jest zastanowić się nad tym rozwiązując analogicznie poniższy (bardzo podobny) układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + 3y = z \\ y^2 + 3z + 1 = x - 1 \\ z^2 + 3x = y - 1 \end{cases}$$

7. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB = AD$ oraz $CB = CD$. Oznaczmy punkt przecięcia prostych BC i AD przez X . Na trójkątach XCD i XAB opisano okręgi. Oznaczmy ich punkt przecięcia (różny od X) przez M . Udowodnij, że punkty A, C, M są współliniowe.

Rozwiązanie:

Sposób 1

Skoro czworokąt $XMAB$ jest cykliczny, to $\sphericalangle XMA + \sphericalangle XBA = 180^\circ$. Dodatkowo $\sphericalangle CBA + \sphericalangle XBA = 180^\circ$, więc $\sphericalangle CBA = \sphericalangle XMA$. Skoro $ABCD$ to deltoid, to $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CDA = \sphericalangle CDX$. Ale skoro czworokąt $XMDC$ jest cykliczny, to $\sphericalangle CDX = \sphericalangle XMC$. Widzimy w takim razie, że $\sphericalangle XMA = \sphericalangle XMC$ i punkty C, A leżą po jednej stronie prostej XM , więc leżą one na jednej prostej przechodzącej przez M (kąt $\sphericalangle CMA = 0$), więc punkty A, C, M są współliniowe.

Sposób 2

Punkt M jest punktem Miquel'a czworokąta $ABCD$, a skoro ten czworokąt ma oś symetrii (prostą AC), to leży on na tejże prostej, co kończy dowód.

8. Niech $\tau(n)$ oznacza liczbę dzielników liczby n , a $\lfloor x \rfloor$ liczbę x zaokrągloną w dół. Pokazać, że:

$$\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \cdots + \tau(n) = \lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor$$

Rozwiązanie:

Sposób 1

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie. Dla $n = 1$ teza zadania jest oczywista. Załóżmy indukcyjnie, że teza działa dla liczby naturalnej n . Pokażemy jak wynioskować z tego tezę dla $n + 1$. Gdy zamieniamy n na $n + 1$ to wartość wyrażenia $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ zwiększy się o 1 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba k dzieli $n + 1$. Więc po prawej stronie równości przybędzie nam tyle jedynek, ile dzielników ma liczba $n + 1$. Ale to dokładnie $\tau(n + 1)$, co kończy dowód.

Sposób 2

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{k=1}^n \sum_{d|k} 1 = \sum_{d=1}^n \sum_{kd \leq n} 1 = \sum_{d=1}^n \lfloor \frac{n}{d} \rfloor$$

co kończy dowód.

9. Dany jest prostokąt $ABCD$ oraz dwa okręgi ω_1 i ω_2 odpowiednio o średnicach AB i AD . Oznaczmy punkt przecięcia tych okręgów (różny od A) przez X . Udowodnić, że punkty B, D, X są współliniowe.

Rozwiązanie:

Skoro AB jest średnicą okręgu, to $\sphericalangle BXA = 90^\circ$. Analogicznie $\sphericalangle AXD = 90^\circ$. Mamy teraz, że $\sphericalangle BXD = \sphericalangle BXA + \sphericalangle AXD = 180^\circ$. Jeśli trzy punkty tworzą kąt 180° to muszą leżeć na jednej prostej – co kończy dowód.

10. Udowodnij, że liczba całkowita, większa od 4, n dzieli liczbę $(n-1)!$, wtedy i tylko wtedy gdy liczba n jest złożona.

Uwaga. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

Rozwiązanie:

Założmy, że n jest złożone. Rozważmy dwa przypadki:

- (a) $n = p^2$, p jest liczbą pierwszą:

Ponieważ $n > 4$ to $p > 2$, stąd $p, 2p < p^2$, czyli $p, 2p \leq p^2 - 1$. Ale mamy teraz, że

$$(p^2 - 1)! = 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \cdot p \cdot (p+1) \cdots (2p-1) \cdot 2p \cdot (2p+1) \cdots (p^2 - 1)$$

Łatwo widać, że ten iloczyn jest podzielny przez $p^2 = n$.

- (b) n jest innej postaci:

Chcemy zapisać n w postaci ab , gdzie $1 < a < b < n$ i $a \neq b$. Niech p będzie najmniejszym dzielnikiem liczby n . Wtedy liczby $a = p$, $b = \frac{n}{p}$ spełniają te warunki (ponieważ $n \neq p^2$). Wtedy mamy, że

$$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdots (a-1) \cdot a \cdot (a+1) \cdots (b-1) \cdot b \cdot (b+1) \cdots (n-1)$$

Łatwo widać, że ten iloczyn jest podzielny przez $ab = n$.

Stąd jeśli $n > 4$ jest złożone, to $n \mid (n-1)!$. Jeśli n jest pierwsze, to żadna z liczb $1, 2, 3, \dots, n-1$ nie ma w swoim rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n , stąd ich iloczyn również jej nie ma. Stąd $n \nmid (n-1)!$

11. Dany jest równoległobok o polu 1. Udowodnić, że można przykryć go w całości prostokątem o polu 2.

Rozwiązanie:

Sposób 1

Bez strat ogólności oznaczmy kolejne wierzchołki równoległoboku przez A, B, C, D i niech $AB = CD = a$ będzie jego dłuższym bokiem oraz przy wierzchołku A będzie kąt ostry (jeśli równoległobok jest także prostokątem to teza jest oczywista). Oznaczmy przez A', B', C', D' rzuty wierzchołków na, odpowiednio, proste CD, CD, AB oraz AB . Udowodnimy, że prostokąt $AA'C'C'$ spełnia warunki zadania.

1) Zawiera on równoległobok $ABCD$, ponieważ A' i C' leżą, odpowiednio, poza odcinkami CD i AB (wynika to z wyboru wierzchołków A i C przy których jest kąt prosty).

2) Jego pole jest niewiększe od 2. Oznaczmy przez h odległość pomiędzy prostymi AB i CD . Z założeń zadania $ah = 1$. Więc

$$P_{AA'CC'} = h \cdot AC' = h(a + DC') < h(a + DC) \leq h(a + a) = 2ha = 2$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z przeszacowania odcinka DC' przez DC (DC jest przeciwprostokątną w trójkącie DCC' , więc jest dłuższa od przyprostokątnej DC'), a druga z założenia, że a jest dłuższym bokiem równoległoboku.
Sposób 2

Niech dłuższą przekątną naszego równoległoboku będzie AC . Poprowadźmy cztery proste: dwie równoległe do AC , przechodzące odpowiednio przez wierzchołki B i D oraz dwie prostopadłe do AC , przechodzące odpowiednio przez wierzchołki A i C . Te cztery proste ograniczają pewien prostokąt, który zawiera równoległobok $ABCD$ (założenie o tym, że przekątna AC jest dłuższa jest tutaj kluczowe).

Dowód: Gdyby jakiś punkt X należący do $ABCD$ leżał poza pasem wyznaczonym przez proste prostopadłe do AC , to wtedy odcinek AX lub CX byłby dłuższy od przekątnej AC , a to sprzeczność, ponieważ AC jest najdłuższym odcinkiem w naszym równoległoboku (dowód faktu, że najdłuższym odcinkiem w wielokącie wypukłym jest jedna z jego przekątnych pozostawiamy Czytelnikowi jako ciekawe ćwiczenie). To, że równoległobok zawiera się w pasie ograniczonym przez proste równoległe do AC jest oczywiste (wierzchołek trójkąta ma to do siebie, że jest najbardziej oddalonym punktem od podstawy leżącej naprzeciwko).

Pozostaje uzasadnić, że jego pole jest ograniczone z góry przez 2. Niech h_1, h_2 to będą odpowiednio odległości punktów B i D od prostej AC (Czytelnik Sposstrzegawczy łatwo zauważy, że $h_1 = h_2$). Z założeń zadania $\frac{1}{2}AC \cdot h_1 + \frac{1}{2}AC \cdot h_2 = 1$. Więc

$$P_{tego\ co\ liczymy} = AC \cdot (h_1 + h_2) = 2 \cdot P_{ABCD} = 2$$

co kończy dowód.

12. Niech a, b, c to długości boków trójkąta. Udowodnić, że zachodzi następująca nierówność:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq \sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b}$$

Rozwiązanie:

Zastosujmy podstawienie $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{a+c-b}{2}$ i $z = \frac{a+b-c}{2}$. Z nierówności trójkąta wiemy, że liczby x, y i z są dodatnie. Ponadto $a = y + z$, $b = x + z$ i $c = x + y$. Naszą tezę możemy teraz zapisać równoważnie jako:

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z} \geq \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z}$$

Lemat. Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y mamy:

$$2\sqrt{x+y} \geq \sqrt{2x} + \sqrt{2y}$$

Dowód lematu: Obie strony nierówności są dodatnie, może ją więc podnieść stronami do kwadratu, otrzymując i przekształcając równoważnie:

$$4x + 4y \geq 2x + 2y + 4\sqrt{xy}$$

$$2x + 2y - 4\sqrt{xy} \geq 0$$

$$x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny. Co kończy dowód lematu. $\square$

Z lematu otrzymujemy nierówności:

$$2\sqrt{x+y} \geq \sqrt{2x} + \sqrt{2y}$$

$$2\sqrt{y+z} \geq \sqrt{2y} + \sqrt{2z}$$

$$2\sqrt{x+z} \geq \sqrt{2x} + \sqrt{2z}$$

Dodając je stronami otrzymujemy tezę.

Uwaga: Okazuje się, że liczby x, y, z mają swoją graficzną interpretację! Niech okrąg wpisany w ABC będzie styczny do boków BC, AC, AB w punktach D, E, F . Jeśli $a = BC, b = AC$ i $c = AB$, to $CD = CE = x, BD = BF = y$ i $AE = AF = z$. Dowód tych równości pozostawiamy Czytelnikowi.

13. Udowodnić, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $0 < x, y, z < 1$ zachodzi nierówność:

$$xyz + (1-x)(1-y)(1-z) < 1.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że z założeń wynika, że $0 < 1-x, 1-y, 1-z < 1$. Zatem

$$xyz + (1-x)(1-y)(1-z) < x \cdot 1 \cdot 1 + (1-x) \cdot 1 \cdot 1 = x + 1 - x = 1,$$

co kończy dowód.

14. Na Wigilię przybyło n gości. Przed wieczerzą tradycyjnie wszyscy łamią się opłatkiem. Każde łamanie trwa dokładnie minutę, a każdy gość po skończeniu łamania może natychmiast przejść do następnego. Nie można dzielić się opłatkiem z tą samą osobą kilka razy. Dla jakich wartości n możliwe jest takie łamanie opłatkiem, by podczas niego każdy się z kimś cały czas łamał i na koniec wszyscy podzielili się ze wszystkimi?

Przykład: dla $n = 4$ jest to możliwe. W pierwszej turze łamią się ze sobą pary $(1,2)$ i $(3,4)$, potem $(1,3)$ i $(2,4)$, a następnie $(1,4)$ i $(2,3)$.

Rozwiązanie:

Oczywiście jeśli n jest nieparzyste to goście nie mogą się połamać opłatkiem zgodnie z warunkami, bo za każdym razem każdy musi się z kimś łamać. Udowodnimy, że wszystkie n parzyste działają. Niech $n = 2m$. Nazwijmy gości

$A_0, A_1, \dots, A_{2m-1}$. Ułóżmy gości $A_1, \dots, A_{2m-1}$ w $(2m-1)$ -ką foremny i niech A_0 to środek okręgu opisanego tego wielokąta. Dla każdego $i = 1, \dots, 2m-1$ zdefiniujemy pary gości, którzy będą się łącać w i -tej minucie. Narysujmy odcinek A_0A_i oraz wszystkie przekątne i boki wielokąta foremnego do niego prostopadłe. Wyznaczają one pary łąiących się gości. Zauważmy, że każda para gości będzie się łącała dokładnie raz (ponieważ w naszym wielokącie foremnym żadna para wierzchołków nie jest współliniowa z A_0) oraz każda para będzie się łącać, zatem podana konstrukcja spełnia warunki zadania.

15. Dane są liczby całkowite dodatnie x, y, z takie, że $NWD(x, y, z) = 1$ oraz $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Wykazać, że $x + y$ jest kwadratem pewnej liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $d = NWD(x, y)$ i niech $x = dx_1, y = dy_1$, gdzie oczywiście $x_1 \perp y_1$. Po wymnożeniu stronami i otrzymujemy równoważnie $z(x + y) = xy$, czyli

$$z(x_1 + y_1) = dx_1y_1$$

Zauważmy, że $x_1 \perp x_1 + y_1$ oraz $y_1 \perp x_1 + y_1$. Dodatkowo zauważmy, że $z \perp d$. Rzeczywiście, gdyby istniała liczba $p > 1$, że $p \mid z$ i $p \mid d = NWD(x, y)$ to liczba ta dzieliłaby każdą z liczb x, y, z , ale z założenia $NWD(x, y, z) = 1$, więc otrzymujemy sprzeczność. Skoro $x_1 \perp x_1 + y_1$ to z otrzymanej wcześniej równości musi zachodzić $x_1 \mid z$. Analogicznie $y_1 \mid z$. A więc skoro $x_1 \perp y_1$ to $x_1y_1 \mid z$. Skoro $z \perp d$, to analogicznie na podstawie powyższej równości $z \mid x_1y_1$. Wnioskujemy więc, że $z = x_1y_1$ a więc także $x_1 + y_1 = d$. Ostatecznie $x + y = d(x_1 + y_1) = d^2$ co kończy dowód.

Uwaga: Oznaczenie $a \perp b$ oznacza, że liczby a i b są względnie pierwsze, inaczej, ich NWD jest równe 1.

16. Dany jest trójkąt ABC , którego okrąg wpisany jest styczny do boków AC i AB odpowiednio w punktach E i F . Niech P to punkt przecięcia prostej EF z dwusieczną $\sphericalangle ABC$. Niech M i N to odpowiednio środki odcinków AC i BC . Udowodnić, że
a) $\sphericalangle BPC = 90^\circ$
b) punkty N, M, P są współliniowe.

Rozwiązanie:

a) Załóżmy bez strat ogólności, że $AB < AC$. Niech I to środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Oczywiście punkt I leży na dwusiecznej $\sphericalangle ABC$. Skoro E to punkt styczności to $IE \perp AC$, więc wystarczy pokazać, że czworokąt $IEPC$ jest cykliczny (bo wtedy $90^\circ = \sphericalangle IEC = \sphericalangle IPC = \sphericalangle BPC$ a to teza). Niech $\sphericalangle BAC = \alpha$. Zachodzi następujący przydatny

Lemat.

$$\sphericalangle BIC = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ$$

Dowód:

Niech kąt wewnętrzny przy wierzchołku B to β , a kąt wewnętrzny przy wierzchołku C to γ . Oczywiście $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Skoro $\sphericalangle CBI = \frac{\beta}{2}$ oraz $\sphericalangle BCI = \frac{\gamma}{2}$

to

$$\begin{aligned}\sphericalangle BIC &= 180^\circ - \sphericalangle CBI - \sphericalangle BCI = 180^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2} = \\ 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} &= \frac{\alpha}{2} + 90^\circ\end{aligned}$$

co kończy dowód lematu.

Przechodząc do rozwiązania zadania, cykliczność czworokąta $IEPC$ jest równoważna równości $\sphericalangle CIP = \sphericalangle CEP$. Ale korzystając z lematu $\sphericalangle CIP = 180^\circ - \sphericalangle BIC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Pozostaje zauważyć, że trójkąt AEF jest równoramienny (ponieważ $AE = AF$ z równości odcinków stycznych), z czego wnioskujemy, że $\sphericalangle FEA = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Ale $\sphericalangle FEA = \sphericalangle CEP$ co kończy dowód.

Alternatywne rozwiązanie podpunktu a)

Niech D to punkt styczności okręgu wpisanego z BC i oznaczmy przez X punkt przecięcia prostej EF z BC . Skoro proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie (punkcie Gergonne'a, wynika to między innymi z Twierdzenia Cevy), to $(B, C; D, X) = -1$, więc także $(PB, PC; PD, PX) = -1$. Dodatkowo D i F są symetryczne względem prostej BP , więc $\sphericalangle BPE = \sphericalangle BPF$, więc PB jest dwusieczną $\sphericalangle EPX$. Łącząc otrzymane fakty i korzystając z Lematu 2.28 z pracy *Dwustosunek i biegunowe* otrzymujemy $\sphericalangle BPC = 90^\circ$ czyli tezę zadania.

b) PM jest środkową w trójkącie prostokątnym, w szczególności $\sphericalangle PMC = 2\sphericalangle CBP = \sphericalangle ABC$, więc proste PM i AB są równoległe, co oznacza (skoro M jest środkiem boku BC), że prosta PM jest linią środkową w trójkącie ABC , w szczególności przechodzi przez środek odcinka AC , to jest N , co kończy dowód.

17. Niech $2 < p < q$ będą kolejnymi liczbami pierwszymi. Udowodnić, że liczba $p+q$ ma co najmniej trzy dzielniki pierwsze lub jest podzielna przez kwadrat liczby pierwszej.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $p+q$ jest liczbą parzystą jako suma dwóch liczb nieparzystych. Przeprowadźmy dowód nie wprost. Załóżmy wbrew tezie zadania, że liczba $p+q = 2r$ ma co najmniej dwa dzielniki pierwsze, w dodatku występujące w rozkładzie tej liczby na czynniki pierwsze w pierwszej potędze. Ale skoro $r > 1$ to r musi być liczbą pierwszą (gdyby nie było, to posiadałoby albo dwa dzielniki różne od dwa, więc sprzeczność, albo dwa dzielniki z czego jeden jest dwójką, ale to także sprzeczność, bo $4 \mid p+q$, albo posiadałoby jeden dzielnik, ale skoro nie jest liczbą pierwszą, to musi być potęgą takowej, w szczególności kwadrat tej liczby pierwszej dzieliłby $p+q$ wbrew założeniu). Otrzymujemy więc, że $p+q = 2r \iff r = \frac{p+q}{2}$ i r jest liczbą pierwszą. Ale $p < \frac{p+q}{2} < q$ (proste wymnożenie). W takim razie r jest liczbą pierwszą spełniającą $p < r < q$, wbrew założeniu, że $p < q$ są kolejnymi liczbami pierwszymi. Sprzeczność kończy dowód.

18. Okręgi dopisane do trójkąta ABC leżące naprzeciwko wierzchołka B oraz C są styczne do boków AC i AB odpowiednio w punktach D i E . Wykazać, że $CD = BE$.

Uwaga. Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg styczny do jednego z jego boków i do przedłużeń dwóch pozostałych.

Rozwiązanie:

Oznaczmy punkt styczności okręgu dopisanego naprzeciwko wierzchołka B z prostą AB jako X , z prostą BC jako K , analogicznie niech Y to punkt styczności okręgu dopisanego leżącego naprzeciwko wierzchołka C i prostej AC , a L z prostą BC .

Sposób 1

Udowodnimy, że punkty D i E w pewnym sensie „połowią” obwód trójkąta ABC .

Lemat. Niech $s = \frac{a+b+c}{2}$, gdzie a, b, c - długości boków trójkąta leżących naprzeciwko wierzchołków, odpowiednio, A, B, C . Wtedy:

$$BC + CD = CB + BE = s$$

Dowód:

$$\begin{aligned} 2s &= BC + CD + BA + AD = BC + CK + BA + AX = BK + BX = 2BK \\ &= 2(BC + CK) = 2(BC + CD) \end{aligned}$$

i analogicznie dla $CB + BE$.

Więc korzystając z lematu $CD = s - BC = BE$ co kończy dowód.

Sposób 2

Zaczniemy od lematu.

Lemat. Dany jest trójkąt ABC , okrąg w niego wpisany jest styczny do BC, AC, AB odpowiednio w D, E, F , a okrąg A -dopisany jest styczny do BC, AC, AB odpowiednio w X, Y, Z . Zachodzi $BD = CX$.

Dowód:

Mamy następujący ciąg równości:

$$BD + BX = BF + BZ = FZ = EY = CE + CY = CD + CX$$

Dodając $BD + CX$ stronami otrzymujemy:

$$2BD + CX + BX = 2CX + CD + BD$$

czyli

$$2BD + BC = 2CX + BC$$

więc

$$BD = CX$$

co kończy dowód.

Dorysujmy okrąg wpisany w ABC styczny do AB w E' a do AC w D' . Korzystając z lematu otrzymujemy

$$CD = AD' = AE' = BE$$

co kończy dowód.

19. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ które spełniają

$$f(xy) + x = yf(x) + f(x)$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y .

Rozwiązanie:

Skoro równanie ma być spełnione dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y , to w szczególności gdy $y = 1$. Otrzymujemy wtedy

$$f(x \cdot 1) + x = 1 \cdot f(x) + f(x)$$

czyli po uproszczeniu

$$f(x) = x$$

Wstawiając do założenia funkcję $f(x) = x$ widzimy, że spełnia ona dane równanie. Więc jedynym rozwiązaniem jest $f(x) = x$.

20. Dany jest zbiór S zawierający n liczb całkowitych. Udowodnić, że istnieje niepusty podzbiór S , którego suma elementów jest podzielna przez n .

Rozwiązanie:

Oznaczmy elementy zbioru przez $a_1, a_2, \dots, a_n$ i niech $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Dodatkowo zdefiniujmy $s_0 = 0$. Mamy $n + 1$ liczb s_i i n możliwych reszt z dzielenia przez n , więc z zasady szufladkowej Dirichleta, pewne $s_i, s_j, i < j$ dają tę samą resztę z dzielenia przez n . pozostaje zauważyć, że wtedy różnica $s_j - s_i$ jest podzielna przez n oraz jest sumą pewnego podzbioru S (dokładnie to elementów $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j$)

21. Udowodnij, że dla liczby pierwszej p , większej od 3, liczba $\frac{p^2-1}{24}$ jest całkowita.

Rozwiązanie:

Liczba pierwsza większa od 3 może dawać z dzielenia przez 6 jedynie reszty 1 oraz 5. Rzeczywiście, gdyby dawała resztę 2, to byłaby parzysta i większa od 2, więc złożona, podobnie z resztą 4. Analogicznie gdyby dawała resztę 3, to byłaby podzielna przez 3 i większa od 3, więc złożona. Widzimy więc, że $p = 6k \pm 1$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k . Rozpisując

$$p^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k = 12k(3k \pm 1)$$

Pozostaje zauważyć, że liczby k i $3k \pm 1$ są różnej parzystości, więc jedna z nich jest na pewno parzysta, co kończy dowód. .

22. Znajdź wszystkie rozwiązania poniższego układu równań w liczbach rzeczywistych x, y, z :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\underbrace{(x + y + z)^2}_4 = \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_4 + 2(xy + yz + zx) \implies xy + yz + zx = 0$$

$$\underbrace{x^3 + y^3 + z^3}_8 = \underbrace{(x + y + z)}_2 \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}_4 + 3xyz$$

Otrzymujemy równość $xyz = 0$. Ze względu na symetrię układu możemy założyć, że $z = 0$. Skoro $x + y = 2$ i $x^2 + y^2 = 4$, to rozpisując $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ z czego wnioskujemy, że $xy = 0$, więc ponownie ze względu na symetrię możemy założyć, że $y = 0$. Pozostały układ trzech równości $x = 2, x^2 = 4, x^3 = 8$ spełnia $x = 2$. Otrzymujemy trzy możliwe rozwiązania: $(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)$, które jak łatwo sprawdzić spełniają żądany układ równań

23. *Adaś i Basia na zmianę kładą na pojedynczych kwadratach tablicy o rozmiarze 100×100 białe pionki. Wygrywa ten, kto pierwszy ustawi 5 białych pionków w jednej linii (pionowej lub poziomej). Grę zaczyna Adaś. Kto ma strategię wygrywającą (czyli, niezależnie od ruchów przeciwnika, wygra)? Podaj odpowiedź wraz z uzasadnieniem.*

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że strategię wygrywającą ma Basia. Po pierwsze, zauważmy, że ktoś wygra (gra jest skończona, ze względu na ograniczoną liczbę pól na plan-szy). Rozważmy następującą strategię dla Basi:

- Sprawdzamy, czy istnieje ruch wygrywający (to znaczy, czy istnieje pole, na którym Basia może położyć pionek i wygrać). Jeśli istnieje to Basia wygrywa kończąc grę, a jeśli nie
- Odbijamy ruch symetrycznie względem środka symetrii planszy.

Wystarczy teraz pokazać poprawność powyższej strategii. Po pierwsze, zawsze będziemy mogli wykonać krok 2 (pole, na którym chcemy położyć pionek będzie wolne). Oznaczmy pole, na którym położył pionek Adam przez A , a pole na którym chcemy położyć pionek przez B . Załóżmy nie wprost, że pole B jest zajęte. Ale zgodnie z przyjętą strategią nie jest one zajęte pionkiem położonym przez Basię (ponieważ położyłaby go ona tam tylko wtedy gdy Adam położyłby wcześniej pionek na polu A , a nie mógł tego zrobić, skoro uczynił to w poprzednim ruchu) oraz nie jest on pionkiem położonym przez Adama (gdyby on go położył tam w poprzednich ruchach, to Basia odpowiedziałaby położeniem pionka na A , ale to przeczy temu, że położył tam pionek Adam).

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Skoro gra jest skończona, wystarczy teraz udowodnić, że w tej strategii Adam nie może wygrać. Załóżmy nie wprost, że Adam wygrał. Oznacza to, że po ruchu Basi istniało pole *wygrujące*, czyli takie, które daje zawodnikowi, który położy na nim pionka zwycięstwo. Jeśli to pole istniało przed ruchem Basi, to oznacza, że Basia nie położyła pionka na polu wygrującym, co przeczy krokowi pierwszemu naszej strategii. Więc pole wygrujące musiało powstać po ruchu Basi. Przyjrzyjmy się temu kiedy powstają pola wygrujące. Pole wygrujące istnieje wtedy i tylko wtedy gdy istnieje piątka kolejnych pól w pewnym rzędzie bądź kolumnie, wśród których dokładnie 4 są zajęte. Dowód jest oczywisty. Zauważmy, że gdy Basia kopiuje ruch Adama, to pionki przez nich położone znajdują się w innych kolumnach oraz w innych wierszach. Skoro ruch Basi utworzył pole wygrujące, to odbijając sytuację symetrycznie względem środka układu otrzymujemy, że Adam utworzył pole wygrujące ruch wcześniej (pole wygrujące Adama jest związane z zestawem innych pięciu pól niż to utworzone przez Basię). To pokazuje, że po ruchu Adama istniało pole wygrujące, z którego Basia nie skorzystała, sprzeczność z pierwszym krokiem algorytmu kończy dowód.

Uwaga: Spostrzeżenie o rozłączności zbiorów pól na które wpływa ruch Basi oraz poprzedzającego ruchu Adama jest konieczne do poprawności zastosowanej metody. Wystarczy rozważyć analogiczną grę gdzie dodatkowo można wygrać poprzez ułożenie 5 pionków na skos.

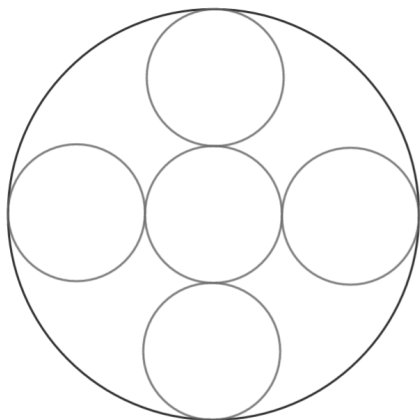
24. *Udowodnij, że za pomocą ołówka, cyrkla i linijki bez podziałki można podzielić okrąg na dziewięć części o równych polach.*

Rozwiązanie:

Wskażemy trzy konstrukcje rozwiązujące ten problem.

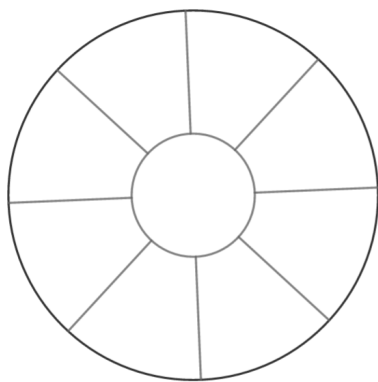
Sposób 1

Skonstruujmy dowolną średnicę i średnicę prostopadłą do niej danego koła i podzielmy je na trzy równe części. Powstaje 6 równych odcinków. Narysujmy okręgi o średnicach będących tymi odcinkami (powstanie nam w ten sposób 5 okręgów, ponieważ dwa odcinki utworzą ten sam okrąg). Skonstruowane koła mają pola równe $\frac{1}{9}$ pola oryginalnego koła (mają trzy razy mniejszy promień). Pozostają cztery przystające fragmenty okręgu. Oczywiście, skoro w sumie zajmują one $\frac{4}{9}$ powierzchni, to każdy z nich zajmuje dokładnie $\frac{1}{9}$ powierzchni.



Sposób 2

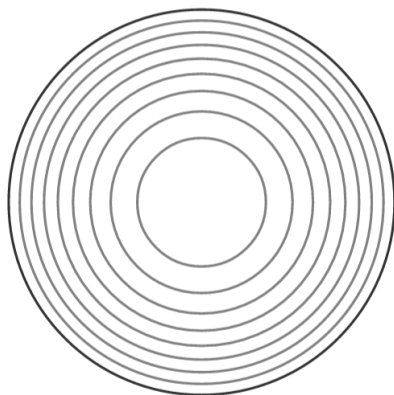
Analogicznie jak wyżej konstruujemy okrąg współśrodkowy z danym kołem o trzy razy mniejszym promieniu. Pozostałą część powierzchni koła dzielimy na 8 równych części (co można zrobić konstruując chociażby ośmiokąt wpisany w dany okrąg).



Sposób 3 (Rozwiązanie autorstwa: Kacper Jachym)

Na początku pokażemy jak z odcinka długości k i odcinka jednostkowego konstruować odcinek długości $\sqrt{k}$. Rozważmy okrąg ω o średnicy $AB = 1 + k$ i punkt C na niej, taki że $AC = 1$ i $CB = k$. Prosta prostopadła do AB przechodząca przez C przecina ω w punktach X i Y . Oczywiście z symetrii $CX = CY$, a z potęgi punktu $CX \cdot CY = 1 \cdot k \implies CX = \sqrt{k}$.

Dalej bez strat ogólności założmy, że nasz okrąg w zadaniu ma promień długości 3. Narysujmy okręgi współśrodkowe z nim o promieniach kolejno $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{8}$. Podzielią nam one koło na 9 części - jedno koło o promieniu 1 i osiem pierścieni kołowych. Oczywiście całe koło ma pole 9π , a koło wewnętrzne - π . Pozostaje zauważyć, że k -ty z pierścieni ma pole równe $\pi((\sqrt{k+1})^2 - (\sqrt{k})^2) = \pi$, co kończy dowód konstrukcji.



Na koniec warto zauważyć, że jedna z trudności zadania polegała na ominięciu najbardziej intuicyjnej konstrukcji: podziału koła na 9 równych wycinków kołowych. Jest to równoważne z konstrukcją dziewięciokąta foremnego, która, jak się okazuje, jest niemożliwa.

Spis treści

Wstęp	2
Wyniki	3
Treści zadań	4
Rozwiązania	6